Exercice : Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit a, b, c 3 réels distincts et A, B, C des fonctions trinômes définies par :

$$A(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)},\ B(x) = \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)},\ C(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

1- Calculer les valeurs prises par ces fonctions en a, b et c. On présentera le résultat sous la forme d'un tableau à double entrée.

Soit α, β, γ 3 réels quelconques et on considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$f(x) = \alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma C(x)$

2- Déterminer (sans calcul idéalement) les images de a, b et c.

3- En utilisant les résultats précédents, déterminer un polynôme f du second degré qui vérifie
$f(-1) = 1,\ f(0) = -1,\ f(1) = 2.$
Réduire ce polynôme.

Solution :

1-

x	a	b	c
$A(x)$	1	0	0
$B(x)$	0	1	0
$C(x)$	0	0	1

2- En utilisant le tableau précédent, on trouve immédiatement $f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta,\ f(c) = \gamma$.

3- D'après la question précédente, on pose $a = -1,\ \alpha = 1,\ b = 0,\ \beta = -1,\ c = 1,\ \gamma = 2$ et on obtient :

$$f(x) = \frac{(x)(x-1)}{(-1)(-2)} + (-1)\frac{(x+1)(x-1)}{(1)(-1)} + 2\frac{(x+1)(x)}{(2)(1)} = \frac{x^2-x}{2} + x^2 - 1 + x^2 + x$$

Finalement, $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$. (On vérifie qu'on trouve bien les valeurs demandées pour valider les calculs !)

Exercice : Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ 2 familles de réel.

On considère le polynôme f du second degré défini par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i x)^2$

1- Réécrire $f(x)$ sous la forme $Ax^2 + Bx + C$.

2- a/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$

b/ En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

3- Quand a-t-on égalité ?

Solution :

1- $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i x)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + a_i^2 = x^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + x \sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

On retrouve la forme demandée avec : $A = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, $B = 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ et $C = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

2- a/ f est positive sur $\mathbb{R}$ comme somme de nombres positifs.

b/ Un trinôme est positif si son discriminant est négatif.
On calcule : $\Delta = B^2 - 4AC$, en remplaçant par les valeurs déterminées ci-dessus, on trouve :

$$\Delta = 4\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right] \leqslant 0.$$

On en déduit directement l'inégalité recherchée : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

3- Il y a égalité ssi $\forall i \in [1;n]$ $a_i = \lambda b_i$ (le λ se met en facteur et on trouve immédiatement le résultat. On retrouve que le chemin le plus court est la ligne droite !).