Exercice 33 :

Soit $a = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{152}{27}}}$

Montrer que $a^3 + 5a$ est un entier.

Solution :

Pour rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$a^3 = 1 + \sqrt{\frac{152}{27}} + 1 - \sqrt{\frac{152}{27}} - 3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right)^2 \sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}} + 3\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\left(\sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right)^2$$

Et on peut écrire $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right)^2 = \left(1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)^2}$

et donc inverser le carré et la racine cubique. (On peut évidemment procéder de même avec l'autre racine cubique mise au carré.

$$a^3 = 2 - 3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)^2\left(-1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)} + 3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)\left(-1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)^2}$$

On ne traite pas en priorité le carré ! Mais on s'intéresse en priorité à la forme $(a+b)(a-b)$:

$$a^3 = 2 - 3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)\left(-1+\frac{152}{27}\right)} + 3\sqrt[3]{\left(-1+\frac{152}{27}\right)\left(-1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)}$$

$$= 2 - 3\sqrt[3]{\frac{125}{27}\left(1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)} + 3\sqrt[3]{\frac{125}{27}\left(-1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)}$$

$$= 2 - 3\times\frac{5}{3}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)} + 3\times\frac{5}{3}\sqrt[3]{\left(-1+\sqrt{\frac{152}{27}}\right)} = 2 - 5\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{152}{27}}} - \sqrt[3]{-1+\sqrt{\frac{152}{27}}}\right) = 2 - 5a$$

On conclut donc $a^3 + 5a = 2$

Exercice 34 :

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $E = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2x^2z^2$

Factoriser E en un produit de 4 facteurs.

Solution :

On utilise les indications de l'énoncé et on cherche 4 facteurs « symétriques » en x, y et z. On sait également qu'il faut des « - » en nombre pair pour assurer que le terme en puissance 4 est bien positif.
Calculons donc :

$$(x+y+z)(x-y-z)(-x-y+z)(-x+y-z)$$
$$= \left(x^2 - xy - xz + xy - y^2 - yz + xz - yz - z^2\right)\left(x^2 - xy + xz + xy - y^2 + yz - zx + yz - z^2\right)$$
$$= \left(x^2 - y^2 - 2yz - z^2\right)\left(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz\right)$$
$$= x^4 - x^2y^2 - x^2z^2 + 2x^2yz - x^2y^2 + y^4 + y^2z^2 - 2y^3z - 2x^2yz + 2y^3z + 2yz^3 - 4y^2z^2 - x^2z^2 + y^2z^2 + z^4 - 2yz^3$$
$$= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2x^2z^2$$

On conclut donc $E = (x+y+z)(x-y-z)(-x-y+z)(-x+y-z)$.